# Portræt af matematikeren

# Kurt Gödel

skrevet af Flemming Chr. Nielsen

bragt i DSB's magasin Ud & Se

september 2007

TEKST FLEMMING CHR. NIELSEN

# Matematisk sultekunstner

Den østrigske matematiker **Kurt Gödel** var livet igennem bange for at blive forgiftet og døde af sult på Princeton University i USA. Men i 1931 gjorde han en opdagelse, der revolutionerede matematikken og skabte tvivl om dens grundlag

POLFOTO


INGEN SLENDRIAN. Som matematikkens overlærer og professor i Göttingen var det den tyske matematiker David Hilberts udgangspunkt. Matematikken skulle være i stand til at besvare ethvert tænkeligt matematisk spørgsmål uden at løbe ind i selvmodsigelser. David Hilbert og hans fyldepen med det røde blæk accepterede ikke den mindste svaghed. Der måtte ikke findes gådefulde kontinenter i matematikken. Ingen mosehuller. Intet morads. Det var selvfølgelig både smukt og storslået at ville give matematikken et sundt og rødmosset udseende. Og hvor pedantisk David Hilbert var, fremgår af en anekdote om hans ferierejse i Skotland sammen med en astronom og en fysiker. Fra deres togvindue får de tre lærde herrer øje på et sort får på en mark. 'I Skotland er fårene altså sorte', siger astronomen. 'Nej', indvender fysikeren, 'men der findes åbenbart sorte får i Skotland'. David Hilbert sad og rystede på hovedet. Så fremsatte han sin konklusion. 'I Skotland findes der mindst én mark, hvorpå der befinder sig mindst ét får, som har mindst én sort side'. I 1899 kunne Hilbert afslutte sit tobindsværk om geometriens grundlag. Det var en kanon over den evige og udødelige matematik. Men som i moderne kanoner kan der siden vise sig uregelmæssigheder, og i England havde matematikeren Bertrand Russell allerede en anelse om, at noget var galt på sejrsskamlen. Uroen bredte sig i de matematiske tidsskrifter, men indtil videre var den, der en dag skulle vælte hele bygningen, kun en sygdomssvækket dreng i det daværende Østrig-Ungarn. Drengen hed Kurt Gödel. Han var født i 1906 i Brünn som søn af en velhavende tekstilfabrikant, og ulykkeligvis fik han et anfald af gigtfeber, da han var seks år gammel. Han blev dog rask igen, men gav sig omgående til at forske i sin egen sygdom og fandt ud af, at den kunne medføre alvorlige hjerteproblemer. Opdagelsen gjorde ham til en af verdens yngste hypokondere, og i resten af sit liv var han konstant bange for at dø. Da han også blev ramt af en ellers harmløs mavelidelse, satte han sig selv på en farlig diæt. Mere og mere mager og afkræftet troede han, at nogen var ude på at forgifte ham, og som paranoid sultekunstner døde han som 71-årig. Men det var ikke det asketiske liv, der skabte Kurt Gödels berømmelse. Den opstod i 1931, da han som 25-årig udgav sin afhandling 'Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme'. Den tyske titel bliver ikke mere forståelig, fordi den oversættes: 'Om formelt uafgørlige udsagn i Principia Mathematica og beslægtede systemer', men afhandlingen kuldkastede hele David Hilberts matematiske program. Da nyheden om Gödels afhandling nåede over Atlanten, stod den store tyske matematiker John von Neumann, der siden var med til at udvikle de første computere, midt i en forelæsningsrække på det prestigefyldte Princeton University om Hilberts udødelige matematik. John von Neumann viskede omgående tavlen ren og brugte resten af semesteret på en diskussion om Gödels opdagelse af de to såkaldte ufuldstændighedssætninger.

Opdagelsen var revolutionerende.

## Løgnerparadokset

Hvad var det, Gödel havde bevist? Selv oversat til dansk er hans opdagelse lige så indviklet som titlen på hans afhandling, men den kan illustreres med et rimeligt forståeligt eksempel, der går tilbage til grækeren Epi-


ILLUSTRATION PETER HERMANN

## 'Jeg lyver altid', sagde Epimenides. Uanset hvordan vi vender og drejer påstanden, er den hverken sand eller falsk.

menides. 'Jeg lyver altid', sagde Epimenides. Hvis påstanden er sand, er Epimenides en løgner, og det var han dermed også, da han fremsatte sin påstand. Derfor er han alligevel ikke en løgner. Hvis påstanden er falsk, er Epimenides ikke en løgner, men det må han alligevel være, fordi han fremsatte sin usande påstand. Uanset hvordan vi vender og drejer Epimenides' påstand, er den hverken sand eller falsk. Den er et såkaldt løgnerparadoks. Inspireret af løgnerparadokset og i et umådelig kompliceret matematisk sprog kunne Gödel bevise, at der findes matematiske sætninger, som ikke kan bevises. Og det betød enden på David Hilberts program for en logisk set ærefuld matematik. Hvis der findes sætninger, som ikke har noget bevis og heller ikke noget modbevis, er matematikken ikke et system, der er befriet for tvivl og indbyggede modsigelser. Matematikken kan aldrig blive et perfekt bygningsværk. Og når selv forbilledet for alle de andre videnskaber ikke er perfekt, er det forgæves at håbe på det perfekte i de øvrige videnskaber. Fire år før Gödels afhandling havde tyskeren Werner Heisenberg opdaget fysikkens usikkerhedsprincip. Det betyder, at hvis man vil måle et objekts position med stor nøjagtighed, må man give afkald på at kunne måle det samme objekts hastighed med samme store nøjagtighed. Og omvendt. Nu var en lignende usikkerhed dukket op i matematikken. I praksis betød Gödels opdagelse heldigvis lige så lidt som Heisenbergs. Fysikkens usikkerhedsprincip gælder kun i kvantefysikkens atomare verden, og Gödels afhandling kuldkaster ikke de matematiske sætninger, som allerede er bevist. Den forhindrer heller ikke, at der stadig kan fremkomme beviser for hidtil uløste matematiske problemer, men den skabte en evigt nagende uro. Matematik ville aldrig blive den uendeligt fremadskridende videnskab, som David Hilbert drømte om. Gödel havde vist, at der selv i en så stringent videnskab som matematik er uovervindelige problemer – i form af de 'uafgørlige udsagn' i titlen på hans afhandling.

### Josef Stalins præmie

For at illustrere det dilemma, Gödels sætninger skabte, kan man kigge på den formodning, som den prøjsiske matematiker →

Christian Goldbach fremsatte i 1742. Han havde undersøgt en masse lige tal større end to og lagt mærke til, at de tilsyneladende alle sammen kunne skrives som summen af to primtal. Men til sin ærgrelse kunne han ikke bevise, at alle lige tal større end to er en sum af to primtal. 243 år efter Goldbachs død har endnu ingen kunnet bevise hans formodning. Og selv hvis det skulle ske, vil den præmie på 100.000 rubler, som Josef Stalin udsatte i 1941, næppe blive udbetalt. Til gengæld udlovede det amerikanske forlag Faber & Faber for seks år siden én million dollars i belønning til den, der knækker gåden. Måske er Goldbachs formodning et konkret eksempel på Gödels uafgørlige udsagn, altså én af de matematiske sætninger, som er sande, men som aldrig vil kunne bevises. Ingen ved det. Måske lykkes det en dag at bevise Goldbachs formodning, men det betyder kun, at så var det ikke dén, der var et uafgørligt udsagn. Der vil ifølge Gödel stadig ligge ubeviselige sætninger begravet dybt inde i matematikken.

Den opdagelse var Gödels store bedrift. Han rystede matematikken i dens grundvold. Den kan aldrig blive logisk afsluttet. Alle videnskabers moder rummer principielt uløselige problemer.

## Gödels gudsbevis

Da Gödels afhandling udkom, var han ansat på Wiens Universitet. Han var ikke interesseret i politik og heller ikke synderlig optaget af Hitlers overfald på Østrig i marts 1938. Han var dybt begravet i sin forskning, og på grund af sit svagelige helbred regnede han ikke med at blive indkaldt som soldat. Men en aften blev han og hans kone overfaldet af en bande nazister, der troede, de var jøder. Slemt tilredt måtte matematikeren indse, at der findes en blodig verden uden for logikken. Han ræsonnerede sig frem til, at når nogen kunne formode, han var jøde, kunne nogen også formode, at han var ved godt helbred og derfor egnet til at være soldat. For at undgå den skæbne søgte han et visum til USA og fik det i 1940. På universitetet i Princeton blev han ansat som professor, og i 1948 blev han amerikansk statsborger. Det sidste med nød og næppe – i hvert fald ifølge en sejlivet myte: Gödel havde betroet Albert Einstein, der var hans kollega på Princeton, at han havde påvist en logisk brist i den amerikanske forfatning, der kunne forvandle USA til et diktatur. Heldigvis kendte Einstein den dommer, der skulle interviewe Gödel i forbindelse med hans ansøgning om statsborgerskab, og Einstein fik dommeren overtalt til ikke at lytte efter, hvis Gödel skulle finde på at indvi ham i forfatningens fejl og mangler. Desværre har ingen siden kunnet finde fejlen, men det menes, at Gödel kan have sporet en modsigelse mellem den oprindelige tekst og én af de mange senere tilføjelser. Plaget af sit forfølgelsesvanvid og sin sultekunst var Gödel ude af stand til at begå sig i virkelighedens verden, men indtil sin død i 1978 skrev han matematiske værker, der i dag opfattes som moderne klassikere. Tilmed formulerede Kurt Gödel et gudsbevis. Han offentliggjorde det dog aldrig, men opfattede det som en rent logisk analyse, og gudsbeviset blev først ni år efter Gödels død medtaget i hans samlede værker.

Læserne kan selv orientere sig i detaljerne. ■

*Flemming Chr. Nielsen er journalist og cand.scient. i matematik.*

Ax. 1. $\bullet\forall x\{[\varphi(x) \to \psi(x)] \land P(\varphi)] \to P(\psi)\}$

Ax. 2. $P(\neg\varphi) \iff \neg P(\varphi)$

Th. 1. $P(\varphi) \to \Diamond\exists x\,[\varphi(x)]$

Df. 1. $G(x) \leftrightarrow \forall\varphi[P(\varphi) \to \varphi(x)]$

Ax. 3. $P(G)$

Th. 2. $\Diamond\exists x\,G(x)$

Df. 2. $\varphi \text{ ess } x \iff \varphi(x) \land \forall\psi\{\psi(x) \to \bullet\forall x[\varphi(x) \to \psi(x)]\}$

Ax. 4. $P(\varphi) \to \bullet P(\varphi)$

Th. 3. $G(x) \to G \text{ ess } x$

Df. 3. $E(x) \leftrightarrow \forall\varphi[\varphi \text{ ess } x \to \bullet\exists x\,\varphi(x)]$

Ax. 5. $P(E)$

Th. 4. $\bullet\exists x\,G(x)$

### KURT GÖDELS GUDSBEVIS

**Gödel indviede kun sine nærmeste venner i sit gudsbevis, for han mente, at det havde visse svagheder. Først efter hans død blev det publiceret. Gödels gudsbevis er en matematisk version af middelalderteologen Anselm af Canterburys gudsbevis, som går ud på følgende: Det hører med til gudsbegrebet, at Gud er det mest fuldkomne væsen. Man kan derfor ikke forestille sig noget, der er mere fuldkomment end Gud. Derfor må Gud eksistere, for hvis han ikke eksisterede, ville han mangle eksistens, og manglende eksistens ville være en ufuldkommenhed ved Gud. Hvis Gud altså ikke eksisterede, kunne man forestille sig et endnu mere fuldkomment væsen, som ud over at ligne Gud også eksisterede. Men det ville stride mod gudsbegrebet, for man kan umuligt forestille sig noget mere fuldkomment end Gud. Ergo må Gud eksistere.**

### MATEMATIKKENS STJERNER

**Dette er det sidste af tre portrætter af matematiske genier. I tidligere numre har vi fortalt om Andrew Wiles og Bertrand Russell.**